Licenciaturas en Matemáticas y en Computación
Universidad de Guanajuato
Tarea 13 de Álgebra Lineal II: Espacios euclídeos y unitarios.
lunes 26 de noviembre de 2012
Fecha de entrega: lunes 3 de diciembre de 2012.

1. Demuestre que si una forma bilineal o sesquilineal ϕ (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ respectivamente) tiene la matriz identidad en una base $u_1, ..., u_n$, entonces ϕ es un producto escalar.

2. Comprobar *detalladamente* la igualdad siguiente que se emplea en la demostración de la proposición 2.3 que aparece en las páginas 254 y 255 del libro de Castellet:

$$\phi(u'_{r+1}, u'_{r+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & \phi(u_1, e_{r+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \phi(u_r, e_{r+1}) \\ \phi(e_{r+1}, u_1) & \cdots & \phi(e_{r+1}, u_r) & \phi(e_{r+1}, e_{r+1}) \end{vmatrix}.$$

3. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales con producto escalar. Se llama adjunta de f a una aplicación lineal $g : F \to E$ tal que $v \cdot g(u) = f(v) \cdot u$ para todo $u \in F$, $v \in E$. Demostrar que g existe y es única.

4. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales euclídeos y sea g la adjunta de f (ver ejercicio 3). Demostrar que
   (a) $g \circ f$ es diagonalizable en una base ortonormal.
   (b) Todos los valores propios de $g \circ f$ son positivos. Designémolos por $a_1, ..., a_n$, $n = \dim E$.
   (c) Existen bases ortonormales $e_1, ..., e_n$ de E y $u_1, ..., u_n$ de F tales que $f(e_i) = \sqrt{a_i} u_i$, $i = 1, ..., n$.

5. Sea E un espacio euclídeo o unitario de dimensión finita. Para un subconjunto $S \subset E$, se define $S^\perp = \{v \in E | u \cdot v = 0 \quad \forall u \in S\}$. Demuestra la Proposición 5.1 del texto, a saber:
   (a) $S^\perp$ es un subespacio vectorial de E;
   (b) $S \subset R \Rightarrow R^\perp \subset S^\perp$;
   (c) $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$;
   (d) $\langle S \rangle \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$;
   (e) $\langle S \rangle \subset (S^\perp)^\perp$.